Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Nombre: ______________
Carné: ______________
Sección: ______________

Matemáticas II (MA-1112)
Enero-Marzo 2008
Segundo Examen Parcial (35%)
Tipo C

Soluciones

(1) **(6 puntos) Para $x > 5$, sea $y = \frac{\sqrt[8]{(x-3)^3}}{(2x-3)\sqrt[4]{(x-5)^3}}$. Use derivación logarítmica para calcular y'.**

Solución:

$$\begin{aligned}
\ln(y) &= \frac{3}{8}\ln(x-3) - \ln(2x-3) - \frac{3}{4}\ln(x-5) \\
&\text{(derivando implícitamente obtenemos)} \\
\frac{y'}{y} &= \frac{3}{8(x-3)} - \frac{2}{2x-3} - \frac{3}{4(x-5)} \\
y' &= \frac{\sqrt[8]{(x-3)^3}}{(2x-3)\sqrt[4]{(x-5)^3}}\left[\frac{3}{8(x-3)} - \frac{2}{2x-3} - \frac{3}{4(x-5)}\right].
\end{aligned}$$

(2) **(4 puntos c/u) Calcule**

(a) Solución:

$$\begin{aligned}
\int (x^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2})^x)dx &= \int x^{\sqrt{2}}dx + \int e^{x\ln(\sqrt{2})}dx \\
&= \frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + \frac{e^{x\ln(\sqrt{2})}}{\ln(\sqrt{2})} + C \\
&= \frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + \frac{(\sqrt{2})^x}{\ln(\sqrt{2})} + C.
\end{aligned}$$

(b) Solución:

$$\int \frac{\log_8(x^4)}{2x}dx = \frac{2}{\ln(8)}\int \frac{\ln(x)}{x}dx$$

$$\textbf{(haciendo } u = \ln(x) \textbf{ con } du = \frac{1}{x}dx\textbf{)}$$

$$= \frac{2}{\ln(8)}\int u du$$

$$= \frac{1}{\ln(8)}u^2 + C$$

$$= \frac{(\ln(x))^2}{\ln(8)} + C.$$

(c) Solución:
Haciendo el cambio de variable $u = 10x - 5x^2$ con $-\frac{du}{10} = (x-1)dx$ obtenemos:

$$\int (x-1)e^{10x-5x^2}dx = -\frac{1}{10}\int e^u du$$

$$= -\frac{1}{10}e^u + C$$

$$= \frac{1}{10}e^{10x-5x^2} + C.$$

(d) **Solución:** Por el primer teorema fundamental del cálculo,

$$D_x\left(\int_0^{3^x}(1-e^t)dt\right) = \left(1-e^{3^x}\right)(3^x)'$$

$$= \left(1-e^{3^x}\right)\left(e^{x\ln(3)}\right)'$$

$$= \left(1-e^{3^x}\right)\ln(3)\,(3^x)\,.$$

(3) (a) (3 puntos) Sea $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$**. Demuestre que** $\cosh^{-1}(y) = \ln(y+\sqrt{y^2-1})$ **para** $y \geq 1$.
Demostración:
Observe que si $y = \cosh(x)$, entonces $x = \cosh^{-1}(y)$. Todo se reduce entonces a demostrar que $x = \ln(y+\sqrt{y^2-1})$. En efecto,

$$y+\sqrt{y^2-1} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2-4}{4}}$$

$$= \frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{\sqrt{(e^x-e^{-x})^2}}{2}$$

$$= \frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$= e^x.$$

Ahora, como $y = \cosh(x) \geq 1$, podemos tomar logaritmos a ambos lados, obteniendo

$$\ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) = x,$$

como queríamos demostrar.

(b) **(1 punto) Encuentre** $(\cosh^{-1}(x))'$

Solución:

$$\begin{aligned}(\cosh^{-1}(y))' &= D_y\left(\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\right)\\ &= \frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}\left[1+\frac{2y}{2\sqrt{y^2-1}}\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.\end{aligned}$$

(c) (2 puntos) Calcule $\int_1^2 \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}$

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} &= \ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\Big|_{y=1}^{y=2}\\ &= \cosh^{-1}(y)\Big|_{y=1}^{y=2}\\ &= \cosh^{-1}(2)-\cosh^{-1}(1)\\ &= \ln(2+\sqrt{4-1})-\ln(1+\sqrt{1-1})\\ &= \ln(2+\sqrt{3})-\ln(1)\\ &= \ln(2+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

(4) (7 puntos) Sea D la región del plano xy acotada por las curvas de ecuaciones $y=0$, $y=x^2$, $x=1$ y $x=2$. Si V es el sólido de revolución que se obtiene al rotar la región D alrededor del eje y, halle el volumen de V.

Solución:

$$\begin{aligned}V &= \int_1^2 2\pi x x^2 dx\\ &= \int_1^2 2\pi x^3 dx\\ &= \frac{15\pi}{2}.\end{aligned}$$